Dynamiques de communication

Olivier Gossner*
Pénélope Hernández**
Abraham Neyman***

Nous introduisons un modèle de communication avec état de la nature dynamique. En utilisant l'entropie comme mesure d'information, nous caractérisons les distributions empiriques espérées sur les actions qui sont réalisables. Nous présentons des applications aux jeux avec et sans intérêts communs.

COMMUNICATION DYNAMICS

We introduce a model of communication with dynamic state of nature. We rely on entropy as a measure of information, characterize the set of expected empirical distributions that are achievable. We present applications to games with and without common interests.

Classification *JEL* : C61, C73, D82.

INTRODUCTION

Les décisions humaines sont souvent porteuses d'information sur l'agent qui les prend. Ainsi, en économie, les décisions de consommation ou d'épargne sont-elles révélatrices des préférences et des croyances de chaque agent, et le rôle des marchés est souvent décrit comme celui d'agréger ces morceaux d'information afin de former les prix. Le traitement de l'information a une telle importance que, dans une organisation telle qu'une firme, une proportion significative des employés est spécialisée dans cette tâche (*cf*. e.g. Radner [1993]).

Les dynamiques d'acquisition, de transmission et de mise à jour de l'information ont été étudiées dans une large gamme de modèle économiques sous des perspectives différentes. Ces modèles varient en fonction de leurs caractéristiques telles que la description de l'information possédée par les agents, leurs ensembles de décisions, leurs observations, leurs préférences, ou encore leurs méthodes de révisions des croyances.

---

* CERAS, URA CNRS 2036.
** Universidad de Alicante.
*** Institute of Mathematics and Center for the Study of Rationality Theory, Hebrew University of Jerusalem.

Cette recherche a reçu le soutient de la bourse 382/98 de l'Israel Science Foundation et du fonds de recherche Zvi Hermann Shapira.

Les auteurs sont reconnaissants à Françoise Forges pour ses commentaires éclairés.

Les dynamiques d'information sont étudiées différemment dans les jeux en un coup ou répétés, et selon que les agents ont la possibilité ou non de faire appel à des mécanismes de communication extérieurs.

Dynamiques de transmission d'information

Nous proposons une brève et partielle typologie des modèles de transmission et des dynamiques correspondantes.

Les jeux en un coup décrivent des situations dans lesquelles les agents n'interagissent qu'une seule fois. Dans cette classe figurent les jeux de transmission d'information de Spence [1973], et de Crawford et Sobel [1992]. Dans ces modèles, à la suite de Harsanyi [1968], les agents possèdent tous une information initiale sur les états de la nature, décrite par leurs types. Au cours du jeu, des décisions sont prises et des signaux sur ces décisions sont observés, ce qui conduit à une révision des croyances de chaque agent sur l'état de la nature, et plus généralement sur les états d'information des autres agents. À chaque équilibre du jeu correspond une dynamique de transmission d'information. Ces modèles n'incorporent pas, par définition, de possibilités de réactions à l'information finale des agents ni aux issues finales du jeu.

Dans les jeux répétés à information incomplète, l'information des joueurs évolue au cours du temps en fonction des choix observés. Il est donc stratégique pour chaque joueur de porter attention aux inférences qui seront faites par les autres joueurs selon le coup joué. Dans les jeux à somme nulle à manque d'information d'un côté, il est souvent optimal pour le joueur informé de ne pas utiliser toute son information, mais de la révéler seulement partiellement au joueur non informé (voir Aumann et Maschler [1967], Sorin [2002]). Dans les jeux à somme non nulle à manque d'information d'un côté, l'évolution générale des processus de croyances du joueur non informé est caractérisée selon des processus de bi-martingales (voir Aumann et Hart [2003]).

Dans les jeux en un coup ou répétés, la possibilité d'accès à des mécanismes de communication externe permet de résoudre les inefficacités liées aux asymétries d'information, si le jeu est à intérêts communs, et résulte en une augmentation de l'ensemble des équilibres dans les jeux généraux. Dans le modèle de Forges [1986] d'équilibres en communication, les agents ont la possibilité, entre deux étapes de décisions, de communiquer à travers un mécanisme arbitraire. Les équilibres de ces jeux étendus sont appelés équilibres en communication. Forges [1986] montre un principe de révélation : tout équilibre en communication peut être obtenu par une dynamique de communication suivant laquelle, à chaque étape, les agents informent le mécanisme de leurs observations, puis reçoivent leurs recommandations d'actions de ce mécanisme (voir aussi Myerson [1991]). Les travaux de Forges [1990], Gerardi [2003], Ben-Porath [2003] et Urbano et Vila [2002] se sont ensuite intéressés à l'implémentation des équilibres en communication par des mécanismes décentralisés. Gossner [1997] caractérise les protocoles de communication robustes aux déviations stratégiques.

Communication avec état du monde dynamique

Nous présentons ici un modèle de jeux répétés avec asymétries d'information sur un état de la nature qui évolue au cours du temps introduit par Gossner Hernández et Neyman [2003]. Un joueur, le prévisionniste, a une meilleure

Revue économique — vol. 55, N° 3, mai 2004, p. 509-516

information que l'autre joueur, l'agent, sur les états futurs de la nature. Nous supposerons sans perte de généralité que le prévisionniste connaît à l'avance les futurs états de la nature. Un jeu répété prend alors place entre le prévisionniste, l'agent, et la nature. Les actions de l'agent à chaque étape de ce jeu sont fonction de son information qui consiste en toutes les actions passées du jeu, y compris les états passés de la nature. Les actions du prévisionniste peuvent dépendre aussi bien du passé du jeu que des états futurs de la nature. Par conséquent, ces décisions possèdent à la fois un aspect paiements et un aspect informatif : un aspect paiements car elles affectent les paiements des deux joueurs ; et un aspect informatif car elles peuvent être utilisées pour transmettre de l'information à l'agent sur les états futurs de la nature.

À chaque étape, l'agent met à jour son information en utilisant à la fois l'observation de l'état courant de la nature et l'action prise par le prévisionniste. Comme l'état de la nature évolue au cours du temps, les croyances de l'agent doivent prendre en compte cet aspect d'évolution. De manière cruciale, l'objet sur lequel portent les croyances de l'agent (à savoir les états futurs de la nature) évolue au cours du temps. Il y a donc une dynamique permanente dans le processus d'utilisation, de transmission et de mise à jour de l'information. Cette dynamique est indépendante du temps, car le début du jeu ne joue ici aucun rôle particulier.

Une spécification des stratégies des joueurs induit une dynamique conjointe sur les états de la nature, les actions du prévisionniste, et les actions de l'agent. Nous étudions cette dynamique au travers de la distribution empirique espérée jointe notée Q de ces trois éléments. Cette distribution Q renseigne sur les statistiques à long terme d'apparitions de tous les triplets d'actions. Cet objet est important pour les aspects stratégiques du jeu car les paiements moyens espérés de long terme peuvent aisément être déduits de Q en prenant l'image par les fonctions de paiements du jeu en un coup.

Nous analysons et caractérisons les distributions Q qui sont réalisables par des stratégies du prévisionniste et de l'agent.

En premier lieu, nous remarquons qu'étant donné que les décisions des joueurs n'influencent pas les états de la nature, leurs stratégies n'influencent pas non plus la marginale de Q sur ces états de la nature. Pour tout Q réalisable, sa marginale sur les états de la nature doit correspondre à leur distribution empirique espérée.

Ensuite, il est intuitif que, au cours du déroulement du jeu, l'information utilisée par l'agent sur les états de la nature ne peut excéder l'information qui lui a été transmise par le prévisionniste au travers de ses actions. Nous utilisons l'entropie (Shannon [1948]) pour mesurer les quantités d'information transmises et utilisées au cours du jeu. Ceci nous permet de dériver une contrainte sur l'ensemble des distributions Q réalisables, que nous appelons contrainte d'information.

Réciproquement, nous montrons que pour toute distribution Q qui possède la marginale adéquate sur les états de la nature et qui vérifie la contrainte d'information, il existe une paire de stratégies du prévisionniste et de l'agent induisant Q comme distribution empirique espérée de long terme.

Arrow ([1971] [1985]) a proposé de mesurer le coût d'un signal y sur l'état x de la nature en fonction de la réduction d'entropie de x conséquente à l'observation de y, et donne des applications économiques de cette approche. Notre modèle fait apparaître de manière endogène et naturelle cette même mesure d'information : l'entropie.

LE MODÈLE

L'ensemble fini des états de la nature est représenté par I. Il y a deux joueurs, le prévisionniste, avec ensemble d'actions fini J, et l'agent, avec ensemble fini d'actions K.

Les fonctions de paiements sont $g^p, g^a : \mathrm{I} \times \mathrm{J} \times \mathrm{K} \to \mathbb{R}$ pour le prévisionniste et pour l'agent respectivement.

Dans le jeu répété, le prévisionniste a une connaissance à l'avance des états futurs de la nature. À chaque étape, ses actions sont fonction de toutes les actions passées et des états passés et futurs de la nature. Une stratégie (pure) σ pour le prévisionniste est donc une suite $(\sigma_t)_t$ de fonctions $\sigma_t : \mathrm{I}^{\mathbb{N}} \times \mathrm{J}^{t-1} \times \mathrm{K}^{t-1} \to \mathrm{J}$, où σ_t décrit le comportement à l'étape *t*.

Le comportement de l'agent ne dépend que du passé du jeu. Une stratégie (pure) τ pour l'agent est donc une suite $(\tau_t)_t$ de fonctions τ_t : $\mathrm{I}^{t-1} \times \mathrm{J}^{t-1} \times \mathrm{K}^{t-1} \to \mathrm{K}$ où τ_t décrit le comportement à l'étape *t*.

Supposons que les suites d'actions de la nature sont identiquement et indépendamment distribuées avec comme loi en une étape. Des stratégies σ, τ définissent pour chaque étape *t* une probabilité $\mathrm{P}^t_{,\sigma\tau}$ sur les actions à l'étape *t*. La distribution empirique espérée jusqu'à l'étape *t* est $\mathrm{Q}^t_{,\sigma\tau} = \frac{1}{t}\sum_{t'=1}^{t} \mathrm{P}^{t'}_{,\sigma\tau}$.

LA CONTRAINTE D'INFORMATION

L'entropie d'une variable aléatoire *x* de loi *p* à valeurs dans un ensemble A mesure son aléa, et aussi la quantité d'information que son observation apporte. Elle vaut mathématiquement :

$$\mathrm{H}(x) = -\sum_{a \in \mathrm{A}} p(x = a) \log p(x = a)$$

où le logarithme est pris en base 2 et $0 \log 0 = 0$ par convention.

Si *x* et *y* sont deux variables aléatoires à valeurs dans A et B et de loi jointe *p*, l'entropie de *x* sachant *y* représente l'aléa de *x* étant donné la connaissance de *y*, ou la quantité d'observation apportée par *x* à un joueur connaissant *y*. Elle vaut :

$$\mathrm{H}(x|y) = -\sum_{a, b \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}} p(x = a, y = b) \log p(x = a | y = b)$$

Soit Q une distribution sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J} \times \mathrm{K}$. Nous disons que Q vérifie la contrainte d'information lorsque pour (i, j, k) des variables aléatoires de loi jointe Q :

$$\mathrm{H}(i, j|k) \geqslant \mathrm{H}(i) \tag{1}$$

Le résultat suivant montre que la contrainte d'information permet de caractériser pleinement l'ensemble des distributions réalisables par des stratégies des joueurs.

THÉORÈME 1. *Pour tous* σ, τ *et* t, $Q^t_{\sigma,\tau}$ *vérifie la contrainte d'information. De plus, si* Q *vérifie la contrainte d'information et a pour marginale   sur* I, *alors il existe* σ *et* τ *telles que* $Q^t_{\sigma,\tau}$ *converge vers* Q *lorsque* t *tend vers l'infini.*

Les règles d'additivité de l'entropie et de l'entropie conditionnelle permettent de réécrire la contrainte d'information sous la forme :

$$H(j|i,k) \geqslant H(i) - H(i|k) \tag{2}$$

Le terme de gauche de cette équation peut être interprété comme la quantité d'information reçue par l'agent qui observe l'action du prévisionniste, j, étant donné l'observation de l'état courant de la nature i et la connaissance de sa propre action k, ou encore comme la quantité d'information envoyée par le prévisionniste à l'agent.

Le terme de droite de (2) est la différence entre l'aléa de i et son aléa, étant donné la connaissance de k. C'est donc la réduction d'incertitude sur i donnée par k, ou encore la quantité d'information sur i apportée par k. Nous l'interprétons comme la quantité d'information utilisée par l'agent sur l'état de la nature.

En suivant cette interprétation, la contrainte d'information exprime le fait que l'information utilisée par l'agent sur l'état de la nature ne peut excéder l'information qui lui est envoyée par le prévisionniste.

APPLICATIONS

Les jeux d'équipe

Les jeux d'équipe, dans lesquels les joueurs ont tous les mêmes objectifs, forment un cadre particulièrement approprié pour étudier le coût et les problèmes d'inefficacité liés à l'information incomplète et à la communication. Comme l'ont montré par exemple Marschak et Radner [1972] et Arrow [1985], une firme peut être décrite par un jeu d'équipe, surtout si l'on s'intéresse aux questions de transmission d'information entre ses membres.

Dans les jeux d'équipe, notre modèle permet d'étudier les inefficacités liées à la nécessité de transmettre de l'information. En effet, supposons tout d'abord que l'agent connaisse lui aussi les états de la nature à l'avance. Dans ce cas, il est possible pour le prévisionniste et pour l'agent de choisir à chaque étape une paire d'actions de manière optimale étant donné l'état courant de la nature. Le paiement correspondant correspond au paiement qu'il est possible d'obtenir en information complète.

Comparons maintenant cette situation à celle modélisée par notre jeu. Deux sources de déviations apparaissent par rapport à la règle précédente qui consiste à choisir optimalement les actions à chaque étape. Tout d'abord, l'agent ne connaît l'état courant de la nature qu'au travers de l'information transmise précédemment par le prévisionniste, il n'en a donc qu'une connaissance imparfaite. Des premières inefficacités sont dues au choix en information partielle de l'agent. Pour corriger ce premier type d'inefficacités, le prévisionniste peut choisir ses actions de manière à informer l'agent des réalisations futures des états de la nature. Ceci impose à son tour une règle de comportement du prévisionniste qui ne correspond pas au choix d'une action optimale à chaque étape, d'où la deuxième source d'inefficacités.

Une bonne règle jointe de comportement pour le prévisionniste et pour l'agent cherchera le meilleur compromis optimal entre ces deux inefficacités : il s'agit pour le prévisionniste d'informer le mieux possible l'agent sans trop dévier de sa règle optimale de conduite.

Nous allons voir que la recherche des règles de comportement optimales de l'équipe, problème *a priori* difficile, est rendue particulièrement simple par notre approche selon la contrainte d'information.

En effet, comme mentionné précédemment, étant donné des stratégies pour l'équipe, le paiement moyen de long terme ne dépend que de la distribution empirique espérée Q des états de la nature et des actions des joueurs. Sachant que l'ensemble de ces distributions réalisables est caractérisé par la contrainte d'information, il est possible de choisir parmi les distributions vérifiant la contrainte celle qui maximise le paiement correspondant.

Nous sommes donc en mesure de caractériser le meilleur paiement pour l'équipe, et donc son degré d'inefficacité par rapport au cas sans coûts de communication, ainsi que de construire des stratégies pour l'équipe qui permettent d'obtenir ce paiement.

Notre modèle s'applique donc à l'étude de l'influence des coûts de communication dans les équipes, qui est un sujet important pour la théorie des organisations (voir Van Zandt [1999] pour un survey). La contrainte d'information ne dépendant pas de la spécification d'un paiement pour l'équipe, nous obtenons donc une approche unifiée de la question des coûts de communication dans les équipes.

Exemple : communication limitée

L'agent prend une décision à chaque étape dans K et le paiement de l'équipe dépend de cette action et de l'état courant. Il est donc de l'intérêt du prévisionniste d'envoyer la meilleure information à l'agent. Cependant, selon la taille de J, il n'est pas toujours possible d'envoyer toute cette information. Il y a dans ce cas un problème de choix sur l'information à envoyer.

Exemple : deviner la nature

Dans ce jeu, $I = J = K = \{0, 1\}$, et les paiements de l'équipe sont de 1 si $i = j = k$, et de 0 sinon. Ce jeu d'un intérêt propre a été analysé dans Gossner et al. [2003b]. Nous montrons que si les états de la nature sont distribués uniformément, le meilleur paiement que l'équipe peut obtenir est compris entre 0,809 et 0,810 (à comparer au paiement de 1 en cas d'information complète).

Les jeux à intérêts distincts

Notre modèle s'applique aussi au cas où les intérêts du prévisionniste et de l'agent, s'ils peuvent comprendre une part commune, ne sont cependant pas complètement alignés.

L'ensemble des paiements réalisables du jeu est défini comme l'ensemble des paiements qu'il est possible d'obtenir par des stratégies des joueurs. Cet ensemble s'obtient comme l'image par la fonction de paiements de l'ensemble des distributions vérifiant la contrainte d'information.

Le niveau de rationalité individuelle d'un joueur dans le jeu répété est le meilleur paiement qu'il peut défendre face à toute stratégie de l'autre joueur. Une asymétrie apparaît ici entre les joueurs. En effet, le prévisionniste possède un double avantage face à l'agent. Tout d'abord, il peut utiliser son information privilégiée sur les états de la nature pour se défendre un meilleur paiement. Mais, aussi, il peut utiliser cette information contre l'agent, ce qui diminue le niveau de rationalité individuelle de l'agent. Nous voyons que le joueur le mieux informé se voit renforcé dans son niveau de rationalité individuelle, et le joueur moins informé pénalisé.

Suivant les définitions précédentes, nous montrons un résultat de type « folk théorème », qui caractérise l'ensemble des paiements d'équilibre de Nash du jeu répété. Nous prouvons en effet que cet ensemble est l'ensemble des paiements réalisables sous la contrainte d'information et individuellement rationnels pour les deux joueurs. Les paiements d'équilibres s'obtiennent donc à partir des données du jeu en un coup en écrivant la contrainte d'information et en calculant les paiements individuellement rationnels.

Exemple : collusion secrète à la Cournot

Soit un jeu de production dans lequel le prévisionniste et l'agent forment un duopole à la Cournot, et choisissent à chaque étape des niveaux de productions q^p, q^a dans des ensembles finis Q^p et Q^a à des coûts unitaires c^p, c^a. Un état de la nature est un couple de réels positifs (a, b). La fonction de demande inverse du marché est donnée par $p = a - b(q^p + q^a)$, et les profits sont $g^p = p(q^p - c^p)$, $g^a = p(q^a - c^a)$. Le prévisionniste ayant une meilleure connaissance que l'agent de la demande future du marché, il peut être bénéfique à la collusion de partager une partie de cette information avec l'agent. Bien entendu, toute communication explicite entre ces producteurs est clairement prohibée. Cependant, rien n'empêche le prévisionniste de transmettre de l'information au travers de ses choix de niveaux de production.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AUMANN R. et HART S. [2003], « Long cheap talk ». *Econometrica*, 71 (6), p. 1619-1660.

AUMANN R. et MASCHLER M. [2003], « Repeated games with incomplete information: A survey of recent results », Report to the US Arms Control and Disarmament Agency ST-116, Washington, DC, III (287-403).

ARROW K. [1971], « The value of and demand for information », dans MCGUIRE C.B. et RADNER R. (eds), *Decision and Organization*, p. 131-139, Amsterdam.

ARROW K. [1985], « Informational structure of the firm », *American Economic Review*, 75 (2), p. 303-307.

BEN PORATH E. [2003], « Cheap talk in games with incomplete information », *Journal of Economic Theory*, 108 (1), p. 45-71.

CRAWFORD V. P. et SOBEL J. [1992], « Strategic information transmission », *Econometrica*, 50, p. 579-594

FORGES F. [1986], « An approach to communication equilibria », *Econometrica*, 54, p. 1375-1385.

FORGES F. [1990], « Universal mechanisms », *Econometrica*, 58, p. 1341-1364.

GERARDI D. [2003], Unmediated communication in games with complete and incomplete information. *Journal of Economic Theory*, forthcoming.

GOSSNER O., HERNÁNDEZ P. et NEYMAN A. [2003], « Dynamic information transmission », *mimeo*

GOSSNER O., HERNÁNDEZ P. et NEYMAN A. [2003], « Online matching pennies », *Discussion Paper* Series 316, Center for Rationality and Interactive Decision Theory, Hebrew University, Jerusalem.

GOSSNER O. [1997], « Protocoles de communication robustes », *Revue économique*, 48, p. 685-695.

HARSANYI [1968], « Games with incomplete information played by "bayesian" players, parts I, II, and III », *Management Science*, 14, p. 159-182, 320-334, et 486-502.

MARSCHAK J. et RADNER R. [1972], *Economic Theory of Teams*, New Haven, Yale University Press.

MYERSON R.B. [1991], *Game Theory*, Cambridge (Mass.), Harvard University Press.

RADNER R. [1993], « The organization of decentralized information processing », *Econometrica*, 61, p. 1109-1146.

SHANNON C. [1948], « A mathematical theory of communication », *Bell System Technical Journal*, 27, p. 379-423, p. 623-656.

SORIN S. [2002], *A First Course on Zero-Sum Repeated Games*, volume 37 of *Mathematiques et Applications*, Springer, Paris.

SPENCE M. [1973], « Job market signalling », *The Quarterly Journal of Economics*, 87, p. 355-374.

URBANO A. et VILA J. [2002], « Computational complexity and communication: Coordination in two-player games », *Econometrica*, 70 (5), p. 1893-1927, septembre.

VAN ZANDT P. [1999], « Decentralized information processing in the theory of organizations », dans Murat SERTEL (eds), *Economic Design and Behavior*, vol. 4, p. 125-160, MacMillan Press Ltd.